

การอธิบายพฤติกรรมของระบบเชิงเส้นอันดับที่หนึ่งทางไฟฟ้าอย่างแม่นยำด้วยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัว

The Accuracy Behavior Explanation of Electrical First-Order System Based on Multi-Time Technique

นพดล สีสุข¹ เกียรติศักดิ์ พรหมภักดี² อนุชา แก้วพุดสูง³ วสุ พันไพศาล⁴ และ ปราโมทย์ วาดเขียน⁵

¹ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนครสวรรค์

ต. ท่าโพธิ์ อ. เมือง จ. พิจิตร 65000 โทรศัพท์ : 0-5596-3501 E-mail: noppadon_su@hotmail.com

²ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520 โทรศัพท์ : 0-2329-8000 E-mail: promote@telecom.kmitl.ac.th

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอเทคนิคการวิเคราะห์แบบใหม่สำหรับระบบอันดับที่หนึ่ง เทคนิคการวิเคราะห์ดังกล่าวจะอยู่บนพื้นฐานเงื่อนไขทางเวลาหลายตัวแปร จากการใช้เทคนิคใหม่นี้จะได้ผลการวิเคราะห์หรือผลตอบสนองที่ละเอียดมากขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม ตัวอย่างเช่น แอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันผลตอบสนองบังคับไม่ใช่เฉพาะที่เวลาเริ่มต้นเท่านั้น แต่จะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันผลตอบสนองบังคับอยู่ตลอดเวลา ดังนั้น สำหรับฟังก์ชันบังคับที่มีค่าคงที่ ผลตอบสนองบังคับที่วิเคราะห์ได้จากเทคนิคใหม่จะเหมือนกับผลตอบสนองบังคับที่วิเคราะห์ได้เทคนิคดั้งเดิม ซึ่งผลจากการจำลองและการทดลองของวงจรอาร์ซี (RC) สอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับผลการวิเคราะห์โดยใช้เทคนิคใหม่ดังกล่าว

คำสำคัญ: ระบบเชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง, เวลาหลายตัว, สมการเชิงอนุพันธ์

Abstract

In this paper, a new analysis technique for ordinary first-order systems is presented. By employing this new technique more accurate results with regard to response can be obtained which are compared to the result of the conventional technique. For example, amplitude of the natural response is shown to be a function of the forced response not only at the initial time but also at arbitrary points in time. Thus, for a constant forced function, which results in a constant forced response the results of the new technique is identical to the conventional technique. Numerical and experimental results obtained from the resistor-capacitor (RC) shows sufficient agreement with the theoretical results.

Keywords: first order system, multi temporal, Differential equation

1. คำนำ

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE) ประกอบด้วยคำตอบเอกพันธ์ ($x_h(t)$) คำตอบเฉพาะ ($x_p(t)$) และคำตอบสมบูรณ์ ($x_c(t)$) ที่

ได้จากการรวมกันของคำตอบเอกพันธ์และคำตอบเฉพาะ ($x_c(t) = x_h(t) + x_p(t)$) สำหรับในกรณีที่ดำเนินการกับระบบทางไฟฟ้า และวงจรเครือข่ายทางไฟฟ้าที่ประกอบด้วยอุปกรณ์พาสซีฟ คำตอบสมบูรณ์ คำตอบเอกพันธ์ และคำตอบเฉพาะจะแทนด้วยผลตอบสนองสมบูรณ์ผลตอบสนองธรรมชาติ และผลตอบสนองบังคับตามลำดับ จากการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม ขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติจะเป็นค่าคงที่และคงที่ตามเวลาเสมอ แม้ว่าจะมีการใช้ฟังก์ชันอินพุตบังคับร่วมด้วย ซึ่งเป็นเพราะเงื่อนไขเริ่มต้น (ผลตอบสนอง) ถูกสมมติให้เป็นผลรวมของผลตอบสนองธรรมชาติและผลตอบสนองบังคับที่เวลาเริ่มต้น t_0 อย่างไรก็ตาม จากผลการทดลองของวงจรเครือข่ายทางไฟฟ้าอันดับที่หนึ่งที่ถูกป้อนด้วยฟังก์ชันบังคับที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา จะพบว่า ผลการทดลองไม่ตรงกับผลการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมในช่วง transient แต่จะเข้ากันได้ดีในช่วง steady สำหรับในกรณีที่ฟังก์ชันบังคับเป็นค่าคงที่ ผลการทดลองและผลการวิเคราะห์จะสอดคล้องกันเป็นอย่างดีทั้งในช่วง transient และ steady

จากเหตุผลข้างต้น งานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอเทคนิคในการวิเคราะห์แบบใหม่ โดยทางผู้วิจัยได้ทบทวนและศึกษาคำราและงานวิจัยหลายๆเรื่อง (Johnson, 1989; Alexander and Sadiku, 2000; Dorf and Svoboda, 2004) แต่ก็ไม่ได้พบว่าคำราและงานวิจัยเหล่านี้ได้กล่าวถึงจุดที่น่าสนใจอย่างเข้มข้น การวิเคราะห์ที่พบในคำราและงานวิจัยต่างๆ ส่วนใหญ่จะเป็นไปในทิศทางเดียวกันซึ่งก็คือ ขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติเป็นค่าคงที่ โดยไม่คำนึงว่าผลตอบสนองบังคับจะเปลี่ยนแปลงตามเวลาหรือไม่ เมื่อไม่นานมานี้ Roychowdhury ได้นำเสนอเทคนิคใหม่เพื่อใช้วิเคราะห์วงจรที่มีแบบจำลองแบบไม่เชิงเส้นโดยการแยกสเกลเวลาออกจากกันโดยใช้วิธี Numerical PDE (Roychowdhury, 2001) แต่ปัญหาที่กล่าวไว้ข้างต้นก็ยังไม่ได้กล่าวไว้ในงานวิจัยนี้ อย่างไรก็ตามแนวคิดในการแยกสเกลเวลาออกจากกันก็เป็นเทคนิคที่น่าสนใจที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับหัวข้อที่ผู้วิจัยสนใจ

ในงานวิจัยนี้ ได้นำเสนอการวิเคราะห์แบบใหม่ของระบบเชิงเส้นอันดับที่หนึ่งโดยใช้ตัวแปรเวลาหลายตัว ซึ่งผลเฉลยแบบปิดที่ได้จะเข้ากันได้ดีกับการทดลองในช่วง transient และ steady เมื่ออินพุตเป็นฟังก์ชันบังคับที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

2. ทฤษฎีและหลักการ

2.1 หลักการ

ในการวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นโดยทั่วไปอันดับที่ 1 สามารถจำลองแบบการทำงานได้ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับที่ 1 ดังสมการ

$$a_1 \frac{dv_o(t)}{dt} + a_0 v_o(t) = b_0 v_i(t) + b_1 \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (1)$$

โดยที่ a_0, a_1, b_0, b_1 เป็นค่าคงที่ ในการหาคำตอบของ $v_o(t)$ หรือผลตอบสนองเอาต์พุตของระบบ เอาต์พุตสมบูรณ์จะถูกแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ผลตอบสนองธรรมชาติ (Natural Response) ($v_{oh}(t)$) เมื่ออินพุตเป็นศูนย์และผลตอบสนองบังคับ (Forced Response) ($v_{or}(t)$) เมื่ออินพุตไม่เป็นศูนย์

$$v_o(t) = v_{oh}(t) + v_{or}(t) \quad (2)$$

และเพื่อที่จะหาค่า $v_{oh}(t)$ เทอมทางด้านขวาของสมการที่ (1) จะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการที่ (1) จึงสามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$a_1 \frac{dv_{oh}(t)}{dt} + a_0 v_{oh}(t) = 0 \quad (3)$$

และด้วยการสมมุติคำตอบให้ $v_{oh}(t) = Ce^{mt}$ โดยที่ C เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น และ m ก็คือค่ารากของสมการคุณลักษณะ ซึ่งสามารถหาได้ดังนี้คือ การแทนค่า $v_{oh}(t)$ ดังกล่าวลงไป ในสมการที่ (2) จะได้ว่า $m = -a_0/a_1$ เมื่อแทนค่า m ลงไปในค่า $v_{oh}(t)$ จะได้

$$v_{oh}(t) = Ce^{\frac{-a_0}{a_1}t} \quad (5)$$

สำหรับการหา $v_{or}(t)$ จากสมการที่ (1) เพื่อให้ง่ายเทอมทางด้านขวาจะถูกแทนด้วย $f(t)$ ซึ่งถูกเรียกว่า ฟังก์ชันบังคับ ดังนั้นสมการที่ (1) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$a_1 \frac{dv_{or}(t)}{dt} + a_0 v_{or}(t) = f(t) \quad (6)$$

โดยที่

$$f(t) = b_0 v_i(t) + b_1 \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (7)$$

และสำหรับ $v_{or}(t)$ นั้นคำตอบจะต้องขึ้นอยู่กับรูปแบบของฟังก์ชัน $f(t)$ ดังนั้นในที่นี้เราจึงแทนด้วยตัวแปร $v_{or}(t)$ เหมือนเดิม ดังนั้นคำตอบสมบูรณ์ที่ได้จึงสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$v_o(t) = Ce^{\frac{-a_0}{a_1}t} + v_{or}(t) \quad (8)$$

และเพื่อจะทำการหาค่า C เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $v_o(0)$ ณ เวลาที่ $t=0$ ให้กับระบบดังนี้

$$\begin{aligned} v_o(0) &= C + v_{or}(0) \\ C &= v_o(0) - v_{or}(0) \end{aligned} \quad (9)$$

และเมื่อแทนค่า C จากสมการที่ (9) ลงไปใน สมการที่ (8) จะได้ว่า

$$v_o(t) = [v_o(0) - v_{or}(0)]e^{\frac{-a_0}{a_1}t} + v_{or}(t) \quad (10)$$

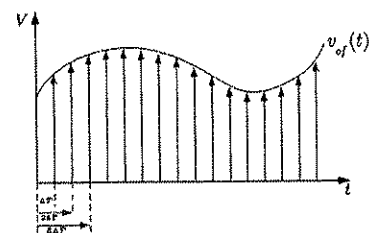
ซึ่งจากสมการที่ (10) จะเห็นได้ว่าคำตอบที่ได้ของ $v_o(t)$ เป็นผลคำตอบของระบบเชิงเส้นโดยทั่วไปในทางอุดมคติ แต่ในความเป็นจริงแล้วถ้าเราทำการพิจารณาในทางปฏิบัติกลับพบว่า ค่า $v_{or}(t)$ จะเกิดความล่าช้ากว่าเมื่อเทียบกับ $v_i(t)$ และ $v_{oh}(t)$

ดังนั้นการแทนค่าเงื่อนไขของสมการที่ (9) เพื่อหาค่า C จึงไม่สอดคล้องกับความเป็นจริงที่เกิดขึ้นในทางปฏิบัติ และเพื่อให้สมเหตุสมผลในทางปฏิบัติเราจะสมมุติให้ $v_{or}(t)$ ล่าช้ากว่าอินพุต และ $v_{oh}(t)$ อยู่ Δt หน่วย ดังนั้น $v_{or}(t)$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$v_{or}(t) = v_{or}(t + \Delta t) \quad (11)$$

และโดยอาศัยมุมมองของ $v_{or}(t + \Delta t)$ ในรูปแบบของ Discrete ซึ่งเป็นจุดอย่างต่อเนื่อง คือ

$$v_{or}(t + \Delta t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - \Delta t - n\Delta T) v_{or}(\Delta t + n\Delta T) \quad (12)$$



รูปที่ 1 การชักตัวอย่างสัญญาณ

ถ้าให้ $\tau = t + \Delta t$ ดังนั้น ที่ค่าจุดที่หนึ่ง ความล่าช้าเมื่อเทียบกับศูนย์ก็คือ Δt ในทำนองเดียวกันจุดที่สองความล่าช้าที่เกิดขึ้นเมื่อเทียบกับศูนย์ก็คือ $\Delta t + \Delta T$ ดังนั้นที่จุด n ความล่าช้าก็คือ $\Delta t + n\Delta T$ และเนื่องจาก ΔT เข้าใกล้ศูนย์ และ $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ทำให้ $n\Delta T$ เป็นสมาชิกของจำนวนจริง ซึ่งก็คือมิติของเวลาเช่นเดียวกับ Δt แต่จะเป็นอิสระจาก Δt ดังนั้นเราจึงแทนสัญลักษณ์ใหม่เป็น τ โดยที่ τ จะมีความสัมพันธ์กับ t คือ

$$\tau \equiv t + \Delta t \quad (13)$$

และโดยการมองสัญญาณเป็นจุดดังกล่าว ถ้าเราสมมติจุดที่หนึ่งของ $v_{or}(t + \Delta t)$ เข้าไปค่าคงที่ C ก็จะได้เป็น

$$\begin{aligned} v_o(0) &= C_0 + v_{or}(\Delta t) \\ C_0 &= v_o(0) - v_{or}(\Delta t) \end{aligned} \quad (14)$$

และสำหรับจุดที่สอง $v_{or}(t + \Delta t + \Delta T)$ เขียนสมการได้เป็น

$$v_o(0) = C_1 + v_{or}(\Delta t + \Delta T) \quad (15)$$

และในทำนองเดียวกันจุดที่ n ใดๆ $v_{or}(\Delta t + n\Delta T)$ เขียนสมการได้เป็น

$$v_o(0) = C_n + v_{or}(\Delta t + n\Delta T) \quad (16)$$

และถ้ากำหนดให้ $C = v_o(0) - \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} v_{or}(\Delta t + n\Delta T)$ จะได้

$$C = v_o(0) - v_{or}(t + \Delta t) \quad (17)$$

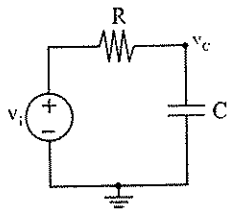
และเมื่อนำ C ลงไปแทนในสมการที่ (8) พร้อมทั้งเปลี่ยนตัวแปรของฟังก์ชันบังคับจาก t เป็น τ เราจะได้สมการใหม่เป็น

$$v_o(t, \tau) = [v_o(0) - v_{or}(\tau)]e^{-\frac{t}{RC}} + v_{or}(\tau) \quad (18)$$

และเพื่อเป็นการยืนยันถึงความแม่นยำในการวิเคราะห์ ระบบอันดับที่หนึ่ง ซึ่งเป็น RC ได้ถูกจัดตั้งขึ้น

2.2 การวิเคราะห์วงจร RC ด้วยเทคนิคที่นำเสนอ

โดยอาศัยวงจร RC ดังแสดงในรูปที่ 2 จากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของกระแสเพื่อหาค่า v_c



รูปที่ 2 ตัวอย่างวงจร RC อันดับหนึ่ง

เมื่อวิเคราะห์วงจรรูปที่ 2 จะทำให้ได้

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = \frac{v_i}{RC} \quad (19)$$

จากสมการ (19) ทำการหาค่าผลตอบสนองทางธรรมชาติ โดยที่ $v_i = 0$ ดังนั้น จึงทำให้ค่าคำตอบของผลตอบสนองทางธรรมชาติ $v_{cn}(t)$ มีค่าเท่ากับ

$$v_{cn}(t) = C_1 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (20)$$

และจากสมการ (19) ทำการหาค่าผลตอบสนองบังคับโดยสมมติให้ $\hat{v}_i = e^{j\omega_i t}$ และ $\hat{v}_{cr} = A e^{j\omega_i t}$ ก็จะได้

$$\frac{d\hat{v}_{cr}}{dt} + \frac{\hat{v}_{cr}}{RC} = \frac{1}{RC} e^{j\omega_i t} \quad (21)$$

เมื่อแก้สมการที่ 21 ดังนั้น

$$\begin{aligned} v_{cr}(\tau) &= \text{Re}\{\hat{v}_{cr}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega_i RC)^2}} \cos(\omega_i \tau - \tan^{-1}(\omega_i RC)) \end{aligned} \quad (22)$$

เมื่อได้ค่าผลตอบสนองทางธรรมชาติและผลตอบสนองบังคับ แล้วนำมา รวมกันโดยอาศัยเทคนิคการแยกตัวแปรเวลา ก็จะได้ค่าผลตอบสนองสมบูรณ์เป็น $v_c(t, \tau) = v_{cn}(t) + v_{cr}(\tau)$ คือ

$$\begin{aligned} v_c(t, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega_i RC)^2}} \cos(\omega_i \tau - \tan^{-1}(\omega_i RC)) + C_1 e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \quad (23)$$

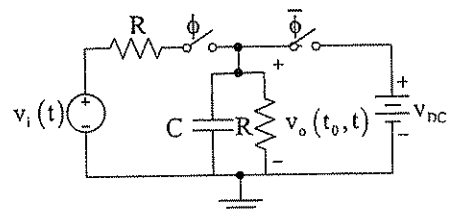
แทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $v_c(0, \tau) = v_o$ จะทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} v_c(t, \tau) &= \left[v_o - \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega_i RC)^2}} \cos(\omega_i \tau - \tan^{-1}(\omega_i RC)) \right] e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \quad (24)$$

$$v_c(t, \tau) = [v_o - V_{cr}(\tau)] e^{-\frac{t}{RC}} + V_{cr}(\tau) \quad (25)$$

3. การทดลองและผลการทดลอง

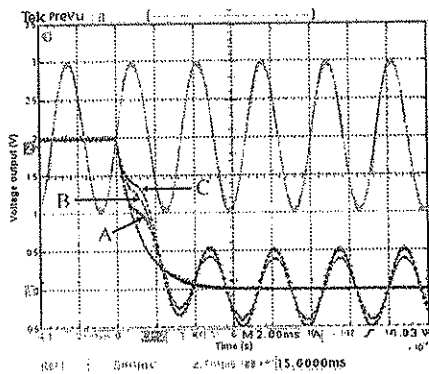
เพื่อเป็นการยืนยันความแม่นยำผลการวิเคราะห์ในข้อห้วงก่อนหน้า จึงได้มีการทดลองดังวงจรรูปที่ 3



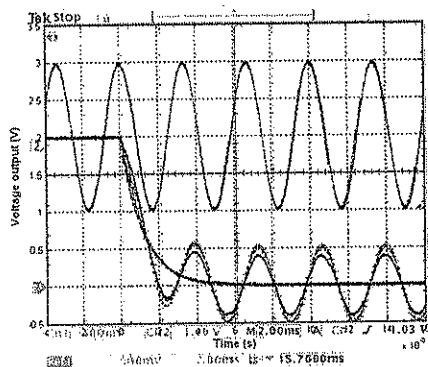
รูปที่ 3 วงจรที่ใช้ในการทดลอง

โดย $V(0)$ และ $V(0, \tau)$ เท่ากับ 2 โวลต์ $V'(0)$ และ $V'(0, \tau)$ เท่ากับ ศูนย์ ส่วนอินพุตบังคับที่แปรตามเวลาจะเป็นไซน์ซอซอค์ขนาด $2 V_p$ ความถี่ 300 Hz

ผลการทดสอบวงจรที่มีอินพุตเป็นฟังก์ชันบังคับที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาจะแสดงได้ดังรูปที่ 4 และ รูปที่ 5

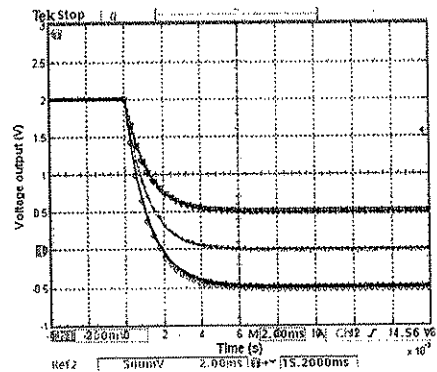


รูปที่ 4 อินพุตบังคับเป็นคลื่นรูปไซน์ที่แปรตามเวลา



รูปที่ 5 อินพุตบังคับเป็นคลื่นรูปโคไซน์ที่แปรตามเวลา

รูปที่ 4 สัญญาณ A เป็นรูปสัญญาณที่ได้จากจำลองผลตามสมการ 25 ซึ่งได้จากเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัว สัญญาณ C เป็นรูปสัญญาณที่ได้จากจำลองผลตามสมการ 10 ซึ่งได้จากเทคนิคดั้งเดิม และสัญญาณ B เป็นสัญญาณที่ได้จากทดลองตามวงจรรูปที่ 3 เมื่อสังเกตในช่วงสถานะชั่วคราวจะพบว่า สัญญาณที่ได้จากการทดลอง (B) นั้นจะมีความชันใกล้เคียงกับความชันของเส้นสัญญาณ A นั้นหมายความว่า สัญญาณที่ได้จากการทดลองจะสอดคล้องกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัว สำหรับรูปที่ 5 เป็นผลการทดลองเมื่อป้อนอินพุตบังคับเป็นสัญญาณคลื่นรูปโคไซน์ ซึ่งผลที่ได้จากการทดลองและผลที่ได้จากการจำลองผลของสมการที่ 25 และ สมการที่ 10 มีความแตกต่างกันเล็กน้อย



รูปที่ 6 อินพุตบังคับเป็นแรงดันไฟฟ้ากระแสตรง

ในรูปที่ 6 แสดงให้เห็นว่า ผลการทดสอบวงจรและผลการจำลองสอดคล้องกัน โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้นของสัญญาณเส้นบนและเส้นล่างของรูปที่ 6 เท่ากับ 2 โวลต์ สัญญาณเส้นบน เป็นผลเนื่องจากอินพุตไฟตรง 0.5 โวลต์ ส่วนสัญญาณเส้นล่าง เป็นผลเนื่องจากอินพุตไฟตรง - 0.5 โวลต์ กล่าวคือ สำหรับอินพุตบังคับที่เป็นไฟตรง 0.5 โวลต์ ผลตอบสนองสมบูรณ์จะเกิดความชันที่ต่ำกว่าในกรณีของอินพุตบังคับที่มีค่า - 0.5 โวลต์ สังเกตว่า อินพุตบังคับ $V_i(\tau)$ มีอิทธิพลโดยตรงต่อผลตอบสนองธรรมชาติ ในกรณีหนึ่งกรณีของการวิเคราะห์แบบใหม่และการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมจะมีผลที่เหมือนกัน เพราะผลตอบสนองบังคับมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติ

4. สรุป

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอเทคนิคการวิเคราะห์วงจร RC แบบใหม่บนพื้นฐานของตัวแปรเวลาหลายตัว สำหรับระบบเชิงเส้นอันดับหนึ่ง ซึ่งจากเทคนิคที่นำเสนอสามารถให้ผลการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับผลการจำลองและผลการทดลอง สำหรับอินพุตบังคับที่แปรเปลี่ยนตามเวลา แอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาตินั้นจะไม่คงที่ ซึ่งจะเปลี่ยนแปลงตามเงื่อนไขและฟังก์ชันบังคับที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

เอกสารอ้างอิง

- [1] Alexander CK, Sadiku MN (2000). "Fundamentals of Electric Circuits". McGraw-Hill, New York.
- [2] Dorf RC, Svoboda JA (2004). "Introduction to Electric Circuits". John Wiley and Sons, New York.
- [3] Johnson DE, Johnson JR (1989). "Electric Circuit Analysis". Prentice-Hall, London.
- [4] Roychowdhury J (2001). "Analyzing circuits with widely separated time scales using numerical pde methods", IEEE Trans. Circ. Syst. 48(5), pp. 548-594.